ある密性条件を満たす集合の一般化容量の評価 (ポテンシャル論とその周辺)

AUTHOR(S):

須川, 敏幸

数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 154-167

ある密性条件を満たす集合の一般化容量の評価

須川敏幸　TOSHIYUKI SUGAWA

広島大学 大学院理学研究科　HIROSHIMA UNIVERSITY

1. HAUSDORFF 容量および測度

以下において (X,ρ) は常に距離空間とする。hを計測関数とする、すなわちhは $(0,+\infty)$ 上で正値 (狭義) 単調増加連続関数とし $h(+0)=0$ を満たすとする。集合 $E\subset X$ および $t\in(0,+\infty]$ に対して

$$\mathcal{H}_h^t(E)=\inf\left\{\sum_j h(\operatorname{diam}U_j);E\subset\bigcup_j U_j,\operatorname{diam}U_j<t\right\}$$

とする。E を被覆する集合 U_j の取り方には色々な流儀があるが、ここでは任意の (有界)Borel 集合でよいことにしておく。$0<s<t\leq+\infty$ に対して $\mathcal{H}_h^t(E)\leq\mathcal{H}_h^s(E)$ であることに注意し、$\mathcal{H}_h(E)=\lim_{t\to 0}\mathcal{H}_h^t(E)$ と定める。Borel 集合 E に対して $\mathcal{H}_h(E)$ は E の Hausdorff h-測度と呼ばれ、$\mathcal{H}_h^\infty(E)$ は E の Hausdorff h-容量と呼ばれる。(一般の集合に対しては“内容量”や“外容量”といった概念が必要であるが、以下では特に必要ではないので、簡単のために任意の集合に対して $\mathcal{H}_h^t(E)$ を上のように定義しておく。) Eが有界な場合は、明らかに $\mathcal{H}_h^\infty(E)\leq h(\operatorname{diam}E)$ である。なお、$\mathcal{H}_h^\infty(E)>0\Leftrightarrow\mathcal{H}_h(E)>0$であることに注意しておく。

特に $h(t)=t^\alpha$ の場合に $\mathcal{H}_{t^\alpha}(E)$ は α-次元 Hausdorff 測度と呼ばれる。$\sup\{\alpha;\mathcal{H}_{t^\alpha}(E)=+\infty\}$ は E の Hausdorff 次元と呼ばれ、H-dim$E$ と表される。$\alpha=$ H-dim$E\in(0,\infty)$ とするとき、容易に分かるように $\beta>\alpha$ ならば $\mathcal{H}_{t^\beta}(E)=0$ である。しかし $\mathcal{H}_{t^\alpha}(E)$ についてはそれが 0 か正の有限値か $+\infty$ かは、一般には何とも言えない。なお、より一般に h_1,h_2 を計測関数として $h_1(t)=o(h_2(t))$ $(t\to 0)$ である時、条件 $\mathcal{H}_{h_2}(E)<\infty$ から $\mathcal{H}_{h_1}(E)=0$ が従う。ほとんど自明な結論であるが、以下の議論で少し有用となるので次のことに注意しておく。

補題 1.1. **$(X,\rho),(Y,\sigma)$ を完備距離空間とし、$f:X\to Y$ を(全射とは限らない)等距離写像、すなわち $\sigma(f(x),f(y))=\rho(x,y)$ が全ての $x,y\in X$ が成り立つとする。このとき、集合 $E\subset X$ に対して $\mathcal{H}_h^t(E)=\mathcal{H}_h^t(f(E))$ が成り立つ。**

証明. 一般に連続写像に関して Borel 集合の逆像はやはり Borel 集合であるが、Borel 集合の像が Borel 集合になるとは限らない。しかし、今の場合は X の完備性と f の等長性から $f(X)$ が Y の閉部分集合となるのでこのことが容易に確かめられる。これに留意すると次のように議論ができる。

E の X における被覆 U_j に対しては $f(U_j)$ が $f(E)$ の Y における被覆となり、f の等距離性から $\operatorname{diam}U_j=\operatorname{diam}f(U_j)$ であるから $\mathcal{H}_h^t(f(E))\leq\mathcal{H}_h^t(E)$ は容易に従う。逆に V_j を $f(E)$ の Y における被覆とすると、$U_j=f^{-1}(V_j)$ とすると U_j は E の X における

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 31A15; Secondary 30C85.

被覆となり、$\operatorname{diam} U_j \leq \operatorname{diam} V_j$ であることから、$\mathcal{H}_h^t(E) \leq \mathcal{H}_h^t(f(E))$ が従う。よって $\mathcal{H}_h^t(E) = \mathcal{H}_h^t(f(E))$ である。 □

2. 一般化容量

一般化容量はユークリッド空間の部分集合についてはFrostmanの学位論文 [1] により初めて定義が与えられた。以下に述べる (可分) 距離空間への一般化および結果の精密化については亀谷 [3] による。[3] では可分性が仮定されているが、以下に述べることに関しては特に可分性は必要ないように思われる。

関数 $\Phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を容量核とする、すなわち、連続 (狭義) 減少関数で $\Phi(+0) = +\infty$ を満たすものとする。ただし、ここでは正値とは限らないとする。有界Borel集合 E に対して $P(E)$ を E に台を持つ X 上のBorel確率測度全体のなす集合とする。また、$P_0(X)$ を有界集合に台を持つような X 上のBorel確率測度全体とする。$\mu \in P_0(X)$ の Φ-ポテンシャル u_μ^Φ を

$$u_\mu^\Phi(x) = \int_X \Phi(\rho(x,y))d\mu(y), \quad x \in X,$$

によって定める。すると u_μ^Φ は X 上で下半連続である。さらに有界Borel集合 E に対して

$$V^\Phi(E) = \inf_{\mu \in P(E)} \|u_\mu^\Phi\|_\infty, \quad ここに \quad \|u_\mu^\Phi\|_\infty = \sup_{x \in X} u_\mu^\Phi(x),$$

とし、E の Φ-容量を

$$C^\Phi(E) = \Phi^{-1}(V^\Phi(E))$$

によって定める。ただし $V^\Phi(E) = +\infty$ の場合は $C^\Phi(E) = 0$ と定める。

なお、もし $\mu \in P(E)$ が p において点測度を持つ、すなわち $\mu(\{p\}) > 0$ であるとすると、定義から $u_\mu^\Phi(p) = +\infty$ となり、特に $\|u_\mu^\Phi\|_\infty = \infty$ である。(よって、可算集合の Φ-容量は常に 0 となる。) 従って、このような測度は容量を計算する際には排除してもよく、実際には最初からnon-atomicなものだけを考えれば十分である。

まず、容量の定義可能性も含め、次のことに注意しておく。

補題 2.1. 距離空間 X の有界Borel集合 E に対して次の不等式が成り立つ：

$$\boldsymbol{C^\Phi(E) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in E} \rho(x,y) \leq \operatorname{diam} E.}$$

証明. $x \in E$ に対して $d(x) = \sup_{y \in E} \rho(x,y)$ と定めると、任意の $y \in E$ について $\rho(x,y) \leq d(x)$ だから $\Phi(d(x)) \leq \Phi(\rho(x,y))$ が成り立つ。これを $\mu \in P(E)$ について積分して

$$\Phi(d(x)) \leq u_\mu^\Phi(x) \leq \|u_\mu^\Phi\|_\infty$$

が得られる。さらに $\mu \in P(E)$ に関して下限を取れば、$\Phi(d(x)) \leq V^\Phi(E)$ となるが、このことから特に $V^\Phi(E)$ は値が $+\infty$ でない限り Φ の像に入り、$C^\Phi(E) = \Phi^{-1}(V^\Phi(E))$ が定義できることに注意しておく。これにより $C^\Phi(E) \leq d(x)$ を得るが、最後に $x \in E$ に関して下限を取れば求める不等式が得られる。最後の式は $d(x) \leq \operatorname{diam} E$ より明白である。 □

$\Phi(t) = \log(1/t)$ の場合は Φ-ポテンシャルは対数ポテンシャルに他ならず、$C^\Phi(E)$ は E の通常の対数容量に一致する。また、$\Phi(t) = t^{2-d}$ の場合は Φ-ポテンシャルは d 次元Newtonポテンシャルに他ならない。従って、上の容量はこれらの古典的な容量の自然な一般化になっていると言える。

3. HAUSDORFF 容量と一般化容量との関係

次の結果は対数容量に関する Erdös-Gillis の結果の一般化である。

定理 3.1 (Kametani [3]). **h を計測関数とし E を可分距離空間 X の Borel 部分集合とする。$\Phi(t) = 1/h(t)$ とするとき、$\mathcal{H}_h(E) < \infty$ ならば $C^{\Phi}(E) = 0$ である。**

この定理は定性的なものだが、主張は弱くなるものの、可分性の仮定を外した上で定量的な結果も示される。[3] に次の主張は明示的には現れないが、証明から読みとれる。

補題 3.2. **h を計測関数とし E を距離空間 X の Borel 部分集合とする。E を X のコンパクト部分集合とし、$\Phi = 1/h$ とする。このとき**

$$\frac{1}{V^{\Phi}(E)} \le \mathcal{H}_h^{\infty}(E)$$

が成り立つ。

証明. 便利のために証明を紹介する。(U_j) を任意の E の有界 Borel 集合による被覆とし、$d_j = \operatorname{diam} U_j$ とする。$U_j \cap E \neq \emptyset$ としてよい。各 j に対して $E_j = E \cap U_j$ とし、$p_j \in E$ を取る。すると $\mu \in P(E)$ に対して

$$\frac{\mu(E_j)}{h(d_j)} = \int_{E_j} \Phi(d_j)d\mu(q) \le \int_{E_j} \Phi(\rho(p_j,q))d\mu(q) \le \int_E \Phi(\rho(p_j,q))d\mu(q) = u_\mu^{\Phi}(p_j) \le \|u_\mu^{\Phi}\|_\infty$$

であるから、

$$\mu(E_j) \le \|u_\mu^{\Phi}\|_\infty h(d_j)$$

を得る。従って

$$1 = \mu(E) \le \sum_j \mu(E_j) \le \|u_\mu^{\Phi}\|_\infty \sum_j h(d_j)$$

となる。あらゆる被覆についての下限を取ることにより

$$1 \le \|u_\mu^{\Phi}\|_\infty \mathcal{H}_h^{\infty}(E)$$

を得るが、さらに $\mu \in P(E)$ に関する下限を取ることにより、

$$1 \le V^{\Phi}(E)\mathcal{H}_h^{\infty}(E)$$

が示される。 □

補題の不等式からは、$\mathcal{H}_h^{\infty}(E) = 0$ ならば $C^{\Phi}(E) = 0$ であることが従う。また、逆向きの評価は、(X,ρ) がユークリッド空間である場合には次のような形で示される。(これも [3] には明示的には現れないが、やはり証明から読みとれる。なお、[6, p. 64] における Frostman の定理に用いられる補題の証明も参照のこと。)

定理 3.3. **$X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = |x-y|$ とし、$-\int_0^{t_0} h(t)d\Phi(t) < +\infty$ が十分小さい $t_0 > 0$ に対して成り立つと仮定する。このとき任意のコンパクト集合 $E \subset X$ に対して**

$$V^{\Phi}(E) = \Phi(C^{\Phi}(E)) \le \Phi(\operatorname{diam} E) - \frac{A_n}{\mathcal{H}_h^{\infty}(E)} \int_0^{2\operatorname{diam} E} h(t)d\Phi(t) \tag{3.1}$$

が成り立つ。ただし、$A_n = (3\sqrt{n})^n \Omega_n$ で Ω_n は n 次元単位球の体積を表す。

系 3.4 (Kametani [3]). 同じ仮定の下で $\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0 \Rightarrow C^\Phi(E) > 0$ が成り立つ。

この系はもともとは Frostman [1] が $h(t) = 1/\log(1/t)$ の場合に示したものであるが、亀谷 [3] によりこの形に拡張された。

やはり便利のために定理の証明を与えておくことにする。その準備として、次の補題を示しておく。以下では $B(p,r) = \{q \in X; \rho(p,q) \le r\}$ としておく。

補題 3.5. E を距離空間 (X, ρ) の有界 Borel 集合で、$r_0 = 2\operatorname{diam} E$ とする。その上に台を持つ X 上の Borel 確率測度 μ と連続関数 $\psi : (0, r_0) \to \mathbb{R}_+$ で、$\psi(+0) = 0$ かつ各 $p \in X$ に対して $\varphi_p(t) = \mu(E \cap B(p,t))$ と定める時、$\varphi_p(t) \le \psi(t)$ を任意の $0 < t < r_0$ に対して満たし、

$$-\int_0^{r_0} \psi(t) d\Phi(t) < +\infty$$

となるものが存在すると仮定すると、

$$V^\Phi(E) \le \Phi(\operatorname{diam} E) - \int_0^{r_0} \psi(t) d\Phi(t)$$

が成立する。

証明. $p \in X$ を固定して連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(q) = \rho(p,q)$ により定義する。すると μ の f による像測度が Riemann-Stieltjes 測度 $d\varphi_p$ に他ならない。(なお、定義から φ_p は右連続である。) 従って、一般論から $[0, +\infty)$ 上の連続関数 g に対して $\int_E g \circ f d\mu = \int_0^{r_0} g d\varphi_p$ が成り立つ。ここで左辺は通常の Riemann-Stieltjes 積分としてよい。容量核 Φ は原点において特異性を持つが、連続関数で下から近似すれば容易に

$$u_\mu^\Phi(p) = \int_E \Phi(\rho(p,q)) d\mu(q) = \int_0^\infty \Phi(t) d\varphi_p(t)$$

が得られる。今、$\operatorname{dist}(p, E) < \operatorname{diam} E$ と仮定し、$\varphi_p(0) = 0$ に注意して部分積分を行うとさらに

$$\begin{aligned} u_\mu^\Phi(p) &= \int_0^{r_0} \Phi(t) d\varphi_p(t) \\ &= \Phi(r_0)\varphi_p(r_0) - \int_0^{r_0} \varphi_p(t) d\Phi(t) \\ &\le \Phi(r_0) - \int_0^{r_0} \psi(t) d\Phi(t) \\ &\le \Phi(\operatorname{diam} E) - \int_0^{r_0} \psi(t) d\Phi(t) \end{aligned}$$

を得る。(正確には、定数 M に対して $\Phi_M = \min\{\Phi, M\}$ を考えて、最後に $M \to +\infty$ とする、という議論を経る。)

次に $\operatorname{dist}(p, E) \ge \operatorname{diam} E$ と仮定すると、任意の $q \in E$ に対して $\rho(p,q) \ge \operatorname{diam} E$ より $\Phi(\rho(p,q)) \le \Phi(\operatorname{diam} E)$ となる。ゆえに $u_\mu^\Phi(p) \le \Phi(\operatorname{diam} E)$ となる。

これらの考察から

$$V^\Phi(E) \le \|u_\mu^\Phi\|_\infty \le \Phi(\operatorname{diam} E) - \int_0^{r_0} \psi(t) d\Phi(t)$$

が得られる。 □

定理3.3の証明. Eを$\mathbb{R}^n$内のコンパクト集合とし、正数dを$\operatorname{diam} E < d$となるように任意に取り固定しておく。適当に平行移動してEが"立方体"$C_0 = (0, d]^n$に含まれているとしてよい。$\mathcal{Q}_0 = \{C_0\}$とする。C_0を2^n個の交わらない立方体に等分割し、その全体を$\mathcal{Q}_1$と表す。すなわち$C \in \mathcal{Q}_1$は、$a_j = 0, 1$として$(a_1/2, (a_1+1)/2] \times \cdots (a_n/2, (a_n+1)/2]$の形を持つ。同様にして$C_0$を$2^{jn}$個の交わらない立方体に等分割し、その全体を$\mathcal{Q}_j$と表す。次に$C_0$に台を持つ正値Borel測度$\mu_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$を定義する。$c_j = (2^j/d)^n h(\sqrt{n}d/2^j)$とし、$C \in \mathcal{Q}_j$に対して、$C \cap E \neq \emptyset$であれば$C$上では$\mu_j$をルベーグ測度の$C$への制限の$c_j$倍、すなわち$d\mu_j(x) = c_j dx_1 \cdots dx_n$とし、$C \cap E = \emptyset$であれば$C$上では$d\mu_j = 0$と定める。$C \cap E \neq \emptyset$であるような$C \in \mathcal{Q}_j$全体の和集合を$E_j$と表すことにすると、$\mu_j$の台は$E_j$であることになる。また、作り方から$C \in \mathcal{Q}_j$について$C \cap E \neq \emptyset$であれば$\mu_j(C) = h(\sqrt{n}d/2^j) = h(\operatorname{diam} C)$が成り立つことに注意しておく。

次に$j \geq 1$を固定して次のようにしてC_0に台を持つ新たな測度$\mu_j^{(0)}, \mu_j^{(1)}, \dots, \mu_j^{(j)}$を順次構成する。$\mu_j^{(0)} = \mu_j$とすれば、定義から各$C \in \mathcal{Q}_j$に対して$\mu_j^{(0)}(C) = h(\operatorname{diam} C)$が成り立つ。次に$\mu_j^{(1)}$を各$C \in \mathcal{Q}_{j-1}$上で

$$d\mu_j^{(1)} = \min\left\{\frac{h(\operatorname{diam} C)}{\mu_j^{(0)}(C)}, 1\right\} d\mu_j^{(0)}$$

となるように定める。作り方から$\mu_j^{(1)}(C) \leq h(\operatorname{diam} C)$が全ての$C \in \bigcup_{m=j-1}^{j} \mathcal{Q}_m$に対して成り立つことに注意する。

以下、$\mu_j^{(k-1)}$が定まれば、$\mu_j^{(k)}$を各$C \in \mathcal{Q}_{j-k}$上で

$$d\mu_j^{(k)} = \min\left\{\frac{h(\operatorname{diam} C)}{\mu_j^{(k-1)}(C)}, 1\right\} d\mu_j^{(k-1)}$$

となるように定義する。すると、やはり$\mu_j^{(k)}(C) \leq h(\operatorname{diam} C)$が全ての$C \in \bigcup_{m=j-k}^{j} \mathcal{Q}_m$に対して成り立つことに注意する。そして、最後に$\mu_j^* = \mu_j^{(j)}$と定める。特に、$\mu_j^*(C_0) \leq h(\operatorname{diam} C_0)$であることに注意せよ。また、構成の仕方から$\mu_j^*$は$\mu_j$に対して絶対連続であるので、特に$\mu_j^*$の台は$E_j$に含まれることが分かる。

この測度μ_j^*に対して、次のことが成り立つ。すなわち、任意の$p \in E$と$j \geq 1$に対してある整数$0 \leq k \leq j$と$C \in \mathcal{Q}_k$が存在して、$p \in C$かつ$\mu_j^*(C) = h(\operatorname{diam} C)$が成り立つ。

実際、各kに対して$\mathcal{Q}_k$の元でpを含むものが唯一存在するが、それを$C_k = C_k(p)$と表すことにする。先の注意から、$\mu_j^*(C_0) \leq h(\operatorname{diam} C_0) = \mu_0(C_0)$であったが、等号が成立しないとしてみよう。すると構成の仕方から、C_0上で$d\mu_j^* = d\mu_j^{(j)} = d\mu_j^{(j-1)}$でなければならない。すると$C_1$に対して$\mu_j^{(j-1)}(C_1) \leq h(\operatorname{diam} C_1)$であるが、もし等号が成立しないとすると$d\mu_j^{(j-1)} = d\mu_j^{(j-2)}$であったことになる。これを繰り返して、等号が成立するようなkが$j-1$まで現れなかったと仮定すると、C_{j-1}上で$d\mu_j^* = d\mu_j$となるが、この場合は$\mu_j^*(C_j) = \mu_j(C_j) = h(\operatorname{diam} C_j)$となり、$k = j$で等号が成立することになる。よって、これにて先の主張が示された。

さて、整数$j \geq 1$及び点$p \in E$に対して、$\mu_j^*(C_k(p)) = h(\operatorname{diam} C_k(p))$が成り立つような最大の$k$を$k_p(j)$と書き、$D_j(p) = C_{k_p(j)}(p)$と定める。このとき、$D_j(p) \cap D_j(q) \neq \emptyset$な

らば $D_j(p) = D_j(q)$ であることに注意する。従って族 $\mathcal{D}_j = \{D_j(p); p \in E\}$ は E_j の互いに交わらない有限被覆となる。よって

$$\mu_j^*(E_j) = \sum_{D \in \mathcal{D}_j} \mu_j^*(D) = \sum_{D \in \mathcal{D}_j} h(\operatorname{diam} D) \geq \mathcal{H}_h^\infty(E) \tag{3.2}$$

が得られる。一方、$\mu_j^*(C_0) \leq h(C_0)$ であるから集合 $\{\mu_j\}$ は弱コンパクトである。従って適当な部分列 j_m を取ればある正値 Borel 測度 μ^* に弱収束する。μ_j^* の台は E_j に含まれていたが、E_j が E の $2^{-j}\sqrt{n}d$-近傍に含まれることと、E が閉集合であったことに注意すると μ^* の台が E に含まれることが分かる。すなわち $\mu^*(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$ が成り立つ。また、(3.2) より

$$\mu^*(E) \geq \mathcal{H}_h^\infty(E) \tag{3.3}$$

も従う。

最後にこの μ^* に対して

$$\mu^*(B(a,t)) \leq A_n h(t) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > 0 \tag{3.4}$$

が成り立つことを示す。ただし、ここに A_n は定理 3.3 に現れる定数、すなわち $A_n = (3\sqrt{n})^n \Omega_n$ で、Ω_n は n 次元単位球の通常の体積である。

まず $t \geq \operatorname{diam} C_0 = \sqrt{n}d$ ならば $\mu^*(\mathbb{R}^n) \leq h(\operatorname{diam} C_0)$ よりこの評価は自明に成り立つことに注意する。よって $t < \operatorname{diam} C_0$ と仮定してよいが、そこで整数 $k \geq 1$ を $2^{-k}\sqrt{n}d \leq t < 2^{-k+1}\sqrt{n}d$ となるように選ぶ。さらに t' を $t < t' < 2^{k-1}\sqrt{n}d$ となるように任意に取り、$\mathcal{Q}_k(a) = \{C \in \mathcal{Q}_k; C \cap B(a,t') \neq \emptyset\}$ と定める。$\mathcal{Q}_k(a)$ の元の和集合は球 $B(a, t' + \sqrt{n}2^{-k}d)$ に含まれるから、体積を比較して

$$\#\mathcal{Q}_k(a) \cdot (2^{-k}d)^n \leq \Omega_n(t' + \sqrt{n}2^{-k}d)$$

が得られる。ただしここに $\Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1)$ は n 次元単位球の体積を表す。よって

$$\#\mathcal{Q}_k(a) \leq \Omega_n \left(\frac{t' + \sqrt{n}2^{-k}d}{2^{-k}d} \right)^n \leq (3\sqrt{n})^n \Omega_n = A_n$$

を得る。従って $j \geq k$ に対して

$$\mu_j^*(B(a,t')) \leq \sum_{C \in \mathcal{Q}_k(a)} \mu_j^*(C) \leq \#\mathcal{Q}_k(a) \cdot h(2^{-k}\sqrt{n}d) \leq A_n h(2^{-k}\sqrt{n}d)$$

が成り立つ。ここで χ を $[0,1]$ に値を取る $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数で、台を $B(a,t')$ 内に持ち、$B(a,t)$ 上では値 1 を取るものとすると、任意の $j \geq k$ について

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi d\mu_j^* \leq \mu_j^*(B(a,t')) \leq A_n h(2^{-k}\sqrt{n}d) \leq A_n h(t)$$

であることが分かるので、$j = j_m$ として極限を取ると

$$\mu(B(a,t)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi d\mu^* \leq A_n h(t)$$

が従う。これにて式(3.4) が示された。

今、Borel 確率測度 $\mu = \mu^*/\mu^*(E)$ を補題 3.5 を適用すると、(3.3) に注意して所期の式(3.1) が得られる。 □

重要な例として $\Phi(t) = \log(1/t)$ の場合を考えてみる。まず γ を正定数として $h(t) = t^\gamma$ を採ると、

$$-\int_0^\delta h(t)d\Phi(t) = \int_0^\delta t^{\gamma-1}dt = \frac{\delta^\gamma}{\gamma} < +\infty$$

であるから、定理 3.3 の仮定を満たすことが分かる。従って、特に、Hausdorff 次元が正であれば対数容量が正であるというよく知られた結果が上の系から分かる。次に $\gamma > 0$ に対して $h(t) = (\log(1/t))^{-\gamma}$, $0 < t < \delta$,（ただし $0 < \delta < 1$）とすると、

$$-\int_0^\delta h(t)d\Phi(t) = \int_0^\delta \frac{dt}{t(\log(1/t))^\gamma}$$

であるから、この積分が有限であるための必要十分条件は $\gamma > 1$ である。

不等式(3.1) を用いれば、E の Hausdorff h-容量の下からの評価から、Φ-容量の下からの評価が従うことになる。次節以下では Hausdorff h-容量の下からの評価を、適当な密性条件の下で導くことを考える。

4. 主定理

以下においては、距離空間 (X, ρ) は完備であると仮定する。（X は可分である必要はない。）

$0 < r_0 \le +\infty$ に対して $\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を非減少関数で $0 < \varphi(r) \le r, 0 < r < r_0$, を満たすものとする。これに対して $A_\varphi(a, r) = \{x \in X; \varphi(r) \le \rho(x, a) \le r\}$ と定める。

空でない閉集合 $E \subset X$ が φ-完全であるとは全ての $a \in E$ かつ $0 < r < \min\{r_0, \operatorname{diam} E/2\}$ に対して $E \cap A_\varphi(a, r) \ne \emptyset$ が成り立つことをいう。ある定数 $0 < c \le 1$ に対して $\varphi(r) = cr$ であるとき、この概念は通常の一様完全性と一致する (cf. [4], [5])。

空でない閉集合が φ-完全であれば、完全集合（すなわち孤立点を持たない集合）であり、X の完備性から非可算集合となる。

h を計測関数、$\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を前節におけるような関数とする。ここで補助関数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を

$$h(\varphi(x/3)/2) = \frac{\exp \varepsilon_1(x)}{2} h(x), \quad h(2\varphi(x)) = \frac{\exp \varepsilon_2(x)}{2} h(x) \quad (0 < x < r_0) \tag{4.1}$$

によって定義する。

$\nu : (0, x_0) \to \mathbb{R}$ が関数 $\lambda : (0, x_0) \to \mathbb{R}$ の**単調優関数**であるとは ν が非負・非減少で $0 < x < x_0$ において $\lambda(x) \le \nu(x)$ であることをいう。

定理 4.1. (X, ρ) を完備距離空間とする。関数 $\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ はある定数 $0 < c \le 1$ に対して $0 < \varphi(r) \le cr$ が成り立つと仮定する。
(i) $-\varepsilon_1$ の単調優関数 ω_1 で

$$\int_0^{r_0} \frac{\omega_1(x)dx}{x} < +\infty \tag{4.2}$$

が成り立つものが存在すると仮定すると、任意の φ-完全な閉集合 E について

$$\mathcal{H}_h^\infty(E) \ge \frac{h(\delta_0)}{2} \exp\left(-\omega_1(\delta_0) - \frac{1}{\log(6/c)} \int_0^{\delta_0} \frac{\omega_1(x)dx}{x}\right) \tag{4.3}$$

が成り立つ。ただしここで δ_0 は $0 < \delta_0 < \min\{r_0, \operatorname{diam} E/2\}$ を満たす任意の数で

(ii) もし $c < 1/4$であり、ε_2 の単調優関数 ω_2 で

$$\int_0^{r_0} \frac{\omega_2(x)dx}{x} < +\infty, \tag{4.4}$$

を満たすものが存在するならば、任意の $0 < d_0 < r_0$ に対して φ-完全なコンパクト集合 $E \subset [0, d_0]$ で

$$\mathcal{H}_h(E) \leq h(d_0) \exp\left(\omega_2(d_0) + \frac{1}{\log(1/2c)} \int_0^{d_0} \frac{\omega_2(x)dx}{x}\right) \tag{4.5}$$

満たすものが構成できる。

本定理では可分性は必要ではないことに注意する。なお、もし (X, ρ) がユークリッド空間であるならば、上の ε_1 の定義において $\varphi(x/3)/2$ を $\varphi(x/3)$ に置き換えることができる（次節の注意参照)。さらに後半の例は、$\mathbb{R}$ または区間が X に等距離に埋め込めるならば、X 内にも容易に実現できる（補題 1.1 参照)。

系 4.2. **(X, ρ) を完備距離空間とする。定数 $0 < c \leq 1$ に対して $\varphi(r) = cr,\ 0 < r < r_0$, とすると X 内の空でない任意の φ-完全集合 E は H-dim$E \geq \log 2/\log(6/c)$ を満たす。**

証明. $\beta = \log 2/\log(6/c)$ として $h(x) = x^\beta$ とすれば、

$$h(\varphi(x/3)/2) = (cx/6)^\beta = x^\beta/2 = h(x)/2$$

となるので $\varepsilon_1(x) = 0$ として定理が適用できる。 □

先の注意から、(X, ρ) がユークリッド空間である場合には $\varphi(x/3)/2$ の $1/2$ が外せるので、Hausdorff 次元の評価も改善され、H-dim$E \geq \log 2/\log(3/c)$ が得られる。

なお、このような一様完全集合の Hausdorff 次元の下からの評価は、最初は Järvi-Vuorinen [2] によって示されたが、定数はやや荒く、空間の次元によるものであった。[5] において次元によらない評価が与えられたが、それとてもユークリッド空間でしか適用できない議論であった。今回は、完備距離空間の場合に証明されたので、それだけでも新しい知見が得られたことになる。

しかし、同じ $h(t) = t^\beta$ に対しては $\varepsilon_2(t) = \beta\log(2c) + \log 2 \neq 0$ であり、定理における積分条件を満たす ε_2 の単調優関数 ω_2 は存在しないので、この Hausdorff 次元の評価の最良性は定理からは従わない。(Euclid 空間の場合の評価 $\log 2/\log(3/c)$ でさえ最良ではないであろう。)

さらに、この定理と評価式(3.1) と組み合わせれば次の結果を得る。

系 4.3. **定理 4.1 と同じ状況で、さらに $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = |x - y|$ とし、容量核 Φ は条件 $-\int_0^{t_0} h(t)d\Phi(t) < +\infty$ を十分小さい $t_0 > 0$ に対して満たすと仮定する。**

このとき任意の φ-完全なコンパクト集合 $E \subset X$ に対して

$$V^\Phi(E) = \Phi(C^\Phi(E))$$

$$\leq \Phi(\operatorname{diam} E) - \frac{A_n}{h(\delta_0)} \int_0^{2\operatorname{diam} E} h(t)d\Phi(t) \cdot \exp\left(\omega_1(\delta_0) + \frac{1}{\log(6/c)} \int_0^{\delta_0} \frac{\omega_1(x)dx}{x}\right)$$

が成り立つ。ただし、ここに δ_0 は $0 < \delta_0 < \min\{r_0, \operatorname{diam} E/2\}$ を満たす任意の数であるとし、A_n は次元 n にのみ依存する正定数である。

より一般の φ についてはこの結果では不十分な場合がある。$\varphi(t)$ の $t = 0$ における増加の度合いが十分緩ければ、定理の次のような変形も有用である。

定理 4.4. **(X, ρ) を完備距離空間とする。関数 φ はある定数 $c > 0, \alpha > 1$ に対して $\varphi(r) \le cr^\alpha$ が成り立つと仮定する。**
(i) $-\varepsilon_1$ の単調優関数 ω_1 で

$$\int_0^{r_0} \frac{\omega_1(x)dx}{x\log(2r_0/x)} < +\infty \tag{4.6}$$

が成り立つものが存在すると仮定すると、任意の φ-完全な閉集合 E について

$$\mathcal{H}_h^\infty(E) \ge \frac{h(\delta_0)}{2}\exp\left(-\omega_1(\delta_0) - \frac{1}{\log\alpha}\int_0^{\delta_0}\frac{\omega_1(x)dx}{x\log(M/x)}\right) \tag{4.7}$$

が成り立つ。ただしここで δ_0 は $cr_0^{\alpha-1} \le 1$ および $0 < \delta_0 < \min\{r_0, \operatorname{diam} E\}$ を満たす任意の正数とし、$M = (2\cdot 3^\alpha/c)^{1/(\alpha-1)} (> \delta_0)$ とする。
(ii) もし ε_2 の単調優関数 ω_2 で

$$\int_0^{r_0} \frac{\omega_2(x)dx}{x\log(2r_0/x)} < +\infty, \tag{4.8}$$

を満たすものが存在するならば、$cd_0^{\alpha-1} < 1/4$ を満たす任意の $0 < d_0 < r_0$ に対して φ-完全なコンパクト集合 $E \subset [0, d_0]$ で

$$\mathcal{H}_h(E) \le h(d_0)\exp\left(\omega_2(d_0) + \frac{1}{\log\alpha}\int_0^{d_0}\frac{\omega_2(x)dx}{x\log(M/x)}\right) \tag{4.9}$$

満たすものが構成できる。ただし、ここに $M = (2c)^{-1/(\alpha-1)} (> d_0)$ とする。

具体的には書かないが、この結果からも同様に一般化容量の下からの評価が従う。

5. 主定理の証明

以下では $a \in X, r > 0$ に対して記号 $B(a, r) = \{x \in X; \rho(x, a) \le r\}$ を用いる。

定理 4.1 の証明. $\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を定理にある函数とし、$E \subset X$ を φ-完全な閉集合とする。正数 δ_0 を $\delta_0 < \min\{r_0, \operatorname{diam} E/2\}$ にとり固定しておく。さらに $\delta_n = \varphi(\delta_{n-1}/3)/2$ により $\delta_1, \delta_2, \ldots$ を順次定める。$\varphi(r) \le cr \le r$ より $\delta_n \le (1/6)\delta_{n-1}$ であることに注意する。

$a \in E$ を任意に選び固定しておく。$B = B(a, \delta_0/2)$ としておこう。$a_0 = a$ と定め、さらに E の φ-完全性から、$a_1 \in A_\varphi(a, \delta_0/3)$ を取ることができる。従って $\rho(a_0, a_1) \ge \varphi(\delta_0/3) = 2\delta_1$ となっていることに注意する。そこで $B_i = B(a_i, \delta_1/2), i = 0, 1,$ としておこう。すると $\operatorname{dist}(B_0, B_1) \ge \rho(a_0, a_1) - \delta_1 \ge \delta_1 > 0$ であるから特に $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ である。また、$\rho(a_0, a_1) + \delta_1/2 \le \delta_0/3 + \delta_1/2 \le (5/12)\delta_0 < \delta_0/2$ より $B_1 \subset B$ である。

次に a の役割を a_i で置き換えて同様の構成を行う。すなわち各 $i = 0, 1$ に対して $a_{i0} = a_i$ として $a_{i1} \in A_\varphi(a_i, \delta_1/3)$ を選ぶ。すると $\rho(a_{i0}, a_{i1}) \ge \varphi(\delta_1/3) = 2\delta_2$ であるから、$B_{ij} = B(a_{ij}, \delta_2)$ とすれば、$\operatorname{dist}(B_{i0}, B_{i1}) \ge \delta_2 > 0$ となる。また $\rho(a_{i0}, a_{i1}) + \delta_2/2 \le (5/12)\delta_1$ より $B_{i1} \subset B$ が成り立つ。

以下同様にして $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{0,1\}^k$ に対して $a_{\underline{i}} = a_{i_1\dots i_k} \in E$ を定め、$B_{\underline{i}} = B(a_{\underline{i}}, \delta_k/2)$ とするとき、次のことが成り立つようにすることができる：

(1) $\rho(a_{i_1\dots i_{k-1}0}, a_{i_1\dots i_{k-1}1}) \geq 2\delta_k$,
(2) $\mathrm{dist}(B_{i_1\dots i_{k-1}0}, B_{i_1\dots i_{k-1}1}) \geq \delta_k$,
(3) $B_{i_1\dots i_{k-1}0} \cup B_{i_1\dots i_{k-1}1} \subset B_{i_1\dots i_{k-1}}$.

そこで、$K_k = \bigcup_{\underline{i}\in\{0,1\}^k} B_{\underline{i}}, K = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ とすると K は E のコンパクト部分集合であることが分かる。実際、$\underline{i} = (i_1, i_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対して $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{i_1\dots i_k}$ は X の完備性と $\delta_k \to 0$ から 1 点のみからなる集合となるが、その点を $f(\underline{i})$ と表せば、写像 $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ は $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に $\{0,1\}$ の離散位相から定まる直積位相を入れて連続写像となる。$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ はコンパクトだから、像 $K = f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ もコンパクトである。

さて、計測関数 h に対して以下ではある正定数 L_0 に対して

$$L_0 \leq 2^k h(\delta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.1}$$

が成り立っていると仮定する。(これについては後で検証する。)

等確率分布から定まる $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の Bernoulli 測度の f による像測度を μ とする。すなわち μ は X 上の Borel 確率測度で集合 K に台を持ち、$\mu(B_{i_1\dots i_k}) = 2^{-k}$ を満たすものである。これについて、次のことが成り立つ。

補題 5.1. 有界 Borel 集合 $U \subset X$ の直径を t とすると、$\mu(U) \leq 2h(t)/L_0$ が成り立つ。

これを認めると、集合 K の Hausdorff h-容量の下からの評価が Frostman の補題からすぐに従う。実際、U_j を K の任意の Borel 被覆とすると、上の補題から $\mu(U_j) \leq 4h(\mathrm{diam}\, U_j)/L_0$ が得られるが、これにより

$$1 = \mu(K) = \mu\Big(\bigcup U_j\Big) \leq \sum \mu(U_j) \leq \frac{2}{L_0} \sum h(\mathrm{diam}\, U_j)$$

が得られるので、このような被覆に関する下限を取ることにより $\mathcal{H}_h^{\infty}(K) \geq L_0/2$ が分かる。構成から $K \subset E$ であったので、最終的に

$$\mathcal{H}_h^{\infty}(E) \geq \frac{L_0}{2} \tag{5.2}$$

が得られることになる。

補題 5.1 の証明. まず $t \geq \delta_0$ の場合を考える。すると (5.1) より $h(t) \geq h(\delta_0) \geq L_0$ だから $4h(t)/L_0 \geq 2 > \mu(U)$ が成り立つ。次に $t < \delta_0$ の場合を考える。$k \geq 1$ を $\delta_k \leq t < \delta_{k-1}$ となるように選ぶ。このとき $I = \{\underline{i} \in \{0,1\}^k; K_{\underline{i}} \cap U \neq \emptyset\}$ の元の個数は高々2個である。実際、もし $\#I \geq 3$ であると仮定してみよう。するとある自然数 $l < k$ と $(i_1, \dots, i_{l-1}) \in \{0,1\}^{l-1}$ が存在して $B_{i_1\dots i_{l-1}i} \cap U \neq \emptyset$ が $i = 0, 1$ に対して成り立つはずである。すると条件の (2) から

$$\mathrm{diam}\, U \geq \mathrm{dist}(B_{i_1,\dots,i_{l-1}0}, B_{i_1,\dots,i_{l-1}1}) \geq \delta_l$$

となるが、一方では $\mathrm{diam}\, U < \delta_{k-1} \leq \delta_l$ であったから、これは矛盾である。

$U \cap K \subset \bigcup_{\underline{i}\in I} B_{\underline{i}}$ であるから測度の劣加法性から

$$\mu(U) \leq \sum_{\underline{i}\in I} \mu(B_{\underline{i}}) = \#I \cdot 2^{-k} \leq 2^{1-k}$$

が分かる。さらに、仮定(5.1) を用いると $\mu(U) \le 2h(\delta_k)/L_0 \le 2h(t)/L_0$ が従い、主張が示される。 □

注意. 上において、$\delta_k = \varphi(\delta_{k-1}/3)/2$ の代わりに $\delta_k = \varphi(\delta_{k-1}/3)$ を採用すると、球 $B_{i_1\dots i_{k-1}0}$ と球 $B_{i_1\dots i_{k-1}1}$ との中心の距離は $\varphi(\delta_{k-1}/3) = \delta_k$ 以上であることしか言えず、球の半径は $\delta_k/2$ だったのでこの二つの球が境界において共通点を持つ可能性が出てくる。しかし、例えばユークリッド空間のような強い凸性を持つような距離空間の場合はこのような共通点は高々一点である。従って Bernoulli 測度の像測度はこのような共通部分には正の測度を持ち得ず上の議論がほとんど同様に進む。ただし、最後の $\#I \le 2$ という主張はそのままでは成立しない。しかし (X,ρ) がユークリッド空間の場合は、[2] や [5] にある体積を用いた議論を使えば、定数は次元に依存するものの、$\#I$ が一様な定数で上から評価することができて、同様の結果が示される。Hausdorff 容量の下からの評価自体は悪くなるが、正であることに変わりはなく、Hausdorff 次元の評価には影響を及ぼさない。

次に、評価式(5.1) を示そう。ここまでは条件式(4.2) は必要なかったが、ここで本質的に用いられる。まず関数 ε_1 の定義式を使えば、

$$
\begin{aligned}
h(\delta_k) = h(\varphi(\delta_{k-1}/3)/2) &= \frac{\exp \varepsilon_1(\delta_{k-1})}{2} h(\delta_{k-1}) \\
&= \quad \cdots \\
&= \frac{\exp(\varepsilon_1(\delta_{k-1}) + \cdots + \varepsilon_1(\delta_0))}{2^k} h(\delta_0)
\end{aligned}
$$

が言える。従ってこの指数部を下から評価すればいいことになる。

仮定 $\varphi(r) \le cr$ を用いると $\delta_k \le \delta_0 \lambda^k$ であることが分かる。ただしここに $\lambda = c/6$ とする。ω_1 が $-\varepsilon_1$ の単調優関数なので

$$
-\left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_1(\delta_j)\right) \le \sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(\delta_j) \le \sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(\delta_0 \lambda^j)
$$

である。$j-1 \le t \le j$ ならば $\lambda^j \le \lambda^t \le \lambda^{j-1}$ であることに注意すると、ω_1 の単調性から

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(\delta_0 \lambda^j) &\le \omega_1(\delta_0) + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j-1}^{j} \omega_1(\delta_0 \lambda^t) dt \\
&= \omega_1(\delta_0) + \int_0^{k-1} \omega_1(\delta_0 \lambda^t) dt \\
&= \omega_1(\delta_0) + \frac{1}{\log(1/\lambda)} \int_{\delta_0 \lambda^{k-1}}^{\delta_0} \frac{\omega_1(x) dx}{x}
\end{aligned}
$$

が従う。ただし、ここで最後に変数変換 $x = \delta_0 \lambda^t$ を行った。仮定(4.2) を用いると、最終的に

$$
-\left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_1(\delta_j)\right) \le \omega_1(\delta_0) + \frac{1}{\log(6/c)} \int_0^{\delta_0} \frac{\omega_1(x) dx}{x} < \infty
$$

を得る。よって(5.1) が定数

$$
L_0 = h(\delta_0) \exp\left(-\omega_1(\delta_0) - \frac{1}{\log(6/c)} \int_0^{\delta_0} \frac{\omega_1(x) dx}{x}\right)
$$

として得られたことになる。よって(5.2)と合わせて不等式(4.3)が証明された。

次に、定理の後半を証明する。まず正数 d_0 を $d_0 < r_0$ にとり、$d_k = 2\varphi(d_{k-1})$ により順次 $d_1, d_2, \ldots$ を定めていく。このとき、仮定 $\varphi(r) < r/4$ より $2d_k < d_{k-1}$ が成り立つことに注意する。そこで、以下のように $\mathbb{R}$ 内に Cantor 集合を構成する。まず $K_0 = [0, d_0] = I$ とし、区間 I の端点から長さ d_1 の閉部分区間を取り、それを左から順に I_0, I_1 とする。すなわち $I_0 = [0, d_1], I_1 = [d_0 - d_1, d_0]$ とする。そこで $K_1 = I_0 \cup I_1$ とする。

同様にして、長さ d_k の区間 $I_{i_1 \ldots i_k}$ が定まったとき、その端点から長さ d_{k+1} の閉部分区間をとり、それを左から順に $I_{i_1 \ldots i_k 0}, I_{i_1 \ldots i_k 1}$ とする。そこで $K_{k+1} = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+1}} I_{i_1 \ldots i_{k+1}}$ と定める。そして最後に $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ と定める。この E が φ-完全であることをこれから証明する。

ある $a \in E$ と $0 < r < d_0/2 = \operatorname{diam} E/2$ に対して $E \cap A_\varphi(a, r) = \emptyset$ であったとする。a を含む K_k の成分を $K_k(a)$ とし、$E_k(a) = K_k(a) \cap E$ と定めると $E = E_0(a) \subset E_1(a) \subset \cdots, \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k(a) = \{a\}$ である。$E_k(a) \subset B(a, \varphi(r))$ となる最小の k を j とする。すると $d_j = \operatorname{diam} E_j(a) < 2\varphi(r)$ である。ここで $2\varphi(r) \le 2r < d_0$ であるから $j > 0$ であることに注意する。仮定および j の取り方から、集合 $E_{j-1}(a) \setminus B(a, r)$ は空でないので、その中から一点 b が取れる。すると $r < |b - a| \le \operatorname{diam} E_{j-1}(a) = d_{j-1}$ であるから、上の不等式と合わせて $d_j < 2\varphi(r) \le 2\varphi(d_{j-1}) = d_j$ を得るが、これは矛盾である。よって、E が φ-完全であることが証明された。

最後にこの E が有限な Hausdorff h-測度を持つことを証明すればよい。自然数 k に対して $I_{i_1 \ldots i_k}$ が 2^k 個からなる E の被覆を与えるので、$d_k < t$ に対して $\mathcal{H}_h^t(E) \le 2^k h(d_k)$ が成り立つ。従って

$$\mathcal{H}_h(E) \le \liminf_{k \to \infty} 2^k h(d_k)$$

が得られる。そこで $h(d_k)$ を上から評価することを考える。関数 ε_2 の定義式(4.1)を用いると、

$$h(d_k) = h(2\varphi(d_{k-1})) = \frac{\exp \varepsilon_2(d_{k-1})}{2} h(d_{k-1}) = \cdots = \frac{\exp(\varepsilon_2(d_{k-1}) + \cdots + \varepsilon_2(d_0))}{2^k} h(d_0)$$

が得られる。ここで ω_2 が ε_2 の単調優関数であることに注意して、先と同様の議論を用いると

$$\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2(d_j) \le \varepsilon_2(d_0) + \frac{1}{\log(1/2c)} \int_0^{d_0} \frac{\omega_2(x)dx}{x}$$

が得られる。よって(4.5)が示された。

定理 4.4 の証明. 証明の基本的な流れは前定理とほとんど同じであるが、$\varepsilon_1(\delta_0) + \cdots + \varepsilon_1(\delta_{k-1})$ などの積分による評価が少し異なるだけである。この場合は $\log \delta_k = \log(\varphi(\delta_{k-1}/3)/2) \le \alpha \log \delta_{k-1} + \log(3^{-\alpha} c/2)$ であるから、$\beta = (\alpha - 1)^{-1} \log(3^{-\alpha} c/2)$ とすれば、$\log \delta_k \le \alpha^k (\log \delta_0 + \beta) - \beta$ が得られる。よって

$$-\left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_1(\delta_j) \right) \le \sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(\delta_j) \le \sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(e^{-\beta}(e^{\beta}\delta_0)^{\alpha^j})$$

という評価が得られる。ここで $c\delta_0^{\alpha-1} \le 1$ より

$$\lambda = e^{\beta}\delta_0 = (3^{-\alpha}c/2)^{1/(\alpha-1)}\delta_0 \le (3^{-\alpha}/2)^{1/(\alpha-1)} < 1 \tag{5.3}$$

であることに注意する。すると $j-1 \le t \le j$ について $\lambda^{\alpha^j} \le \lambda^{\alpha^t} \le \lambda^{\alpha^{j-1}}$ であるので、

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} \omega_1(e^{-\beta}\lambda^{\alpha^j}) &\le \omega_1(\delta_0) + \sum_{j=1}^{k-1}\int_{j-1}^{j} \omega_1(e^{-\beta}\lambda^{\alpha^t})dt \\ &\le \omega_1(\delta_0) + \int_0^{k-1} \omega_1(e^{-\beta}\lambda^{\alpha^t})dt \\ &= \omega_1(\delta_0) + \frac{1}{\log\alpha}\int_{\delta_0}^{e^{-\beta}\lambda^{\alpha^{k-1}}} \frac{\omega_1(x)dx}{x(\beta+\log x)}\end{aligned}$$

を得る。ただし、ここで変数変換 $x = e^{-\beta}\lambda^{\alpha^t}$ を用いた。今 $M = e^{-\beta} = (2\cdot 3^\alpha/c)^{1/(\alpha-1)}$ とおけば(5.3) より $\delta_0 < M$ であることに注意する。すると条件(4.6) より

$$-\left(\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_1(\delta_j)\right) \le \omega_1(\delta_0) + \frac{1}{\log\alpha}\int_0^{\delta_0} \frac{\omega_1(x)dx}{x\log(M/x)} < \infty$$

が得られ、最終的に所期の(4.7) が得られたことになる。

後半についても同様である。$d_k = 2\varphi(d_{k-1}) \le 2cd_{k-1}^\alpha$ より $\beta = (\alpha-1)^{-1}\log(2c)$ とおけば、$\log d_k \le \alpha^k(\log d_0 + \beta) - \beta$ となり、仮定 $cd_0^{\alpha-1} < 1/4$ より $e^\beta d_0 = (2c)^{1/(\alpha-1)}d_0 < 2^{-1/(\alpha-1)} < 1$ となる。先と同様の計算により

$$\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_2(d_j) \le \omega_2(d_0) + \frac{1}{\log\alpha}\int_0^{d_0}\frac{\omega_2(x)dx}{x\log(M/x)}$$

が示される。ただしここに $M = e^{-\beta} = (2c)^{-1/(\alpha-1)} > d_0$ である。

6. 定理 4.4 の応用例

定理 4.1 は適用できないが、定理 4.4 なら適用可能な例をここで一つ紹介しておく。

$c > 0, \alpha > 1, r_0 > 0$ を定数とし、$cr_0^\alpha \le r_0$ を満たしているとする。これに対して $\varphi(r) = cr^\alpha$ $(0 < r < r_0)$ と定義する。このような φ に対しては、実は次のような計測関数がうまく働く：$h(t) = (\log(2r_0/t))^{-\gamma}, 0 < t < r_0$. 便宜上 $h(t)$ は $t \ge r_0$ については適当に定義されているとしておく。これについて(4.1) で定義される ε_j を計算してみよう：

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x) &= \log\frac{2h(\varphi(x/3)/2)}{h(x)} \\ &= \log 2 - \gamma\log\left(\frac{\alpha(\log(2r_0/x)+C)}{\log(2r_0/x)}\right) \\ &= \log 2 - \gamma\log\alpha - \frac{C\gamma}{\log(2r_0/x)} + O((\log(2r_0/x))^{-2}),\end{aligned}$$

ただし、ここで $C = \log(3/2r_0) + (1/\alpha)\log(4r_0/c)$ と置いた。$cr_0^\alpha \le r_0$ と仮定していたので、$C > \log 3 - \log 2 > 0$ であることに注意する。従って

$$\gamma = \frac{\log 2}{\log\alpha} \tag{6.1}$$

とおけば、$x \to +0$ の時 $\varepsilon_1(x) = o(1)$ となる。この漸近展開から容易に分かるように、$\varepsilon_1(x)/x$ は原点の近くで可積分ではないが、$\varepsilon_1(x)/x \log(2r_0/x)$ は可積分となる。従って定理 4.4 の前半が適用できる。

さらに同様にして ε_2 も計算してみると、(6.1) と同じ γ に対して同様の評価ができることが分かり、定理 4.4 の後半も適用可能である。すなわち、この場合には定理の例が $0 < \mathcal{H}_h^\infty(E) \le \mathcal{H}_h(E) < \infty$ を満たしていることになる。以上をまとめると、次の結果が得られる。

定理 6.1. (X, ρ) を完備距離空間とする。$c > 0, \alpha > 1, r_0 > 0$ を $cr_0^\alpha \le r_0$ を満たす定数とし、$\varphi : (0, r_0) \to \mathbb{R}$ を $\varphi(r) = cr^\alpha$ により定める。さらに、$\gamma = \log 2/\log \alpha$ として計測関数 $h(t) = (\log(2r_0/t))^{-\gamma}, 0 < t < r_0$ とする。このとき、φ-完全な閉集合 $E \subset X$ に対して $\mathcal{H}_h^\infty(E) > 0$ が成り立つ。さらに (X, ρ) が 1 次元ユークリッド空間である時、φ-完全なコンパクト集合 $E \subset X$ で、$0 < \mathcal{H}_h^\infty(E) \le \mathcal{H}_h(E) < \infty$ を満たすものが存在する。

なお、3 節の最後に述べた例における計算結果を使えば、次の結果が系として導かれる。

系 6.2. (X, ρ) をユークリッド空間とし、それ以外の仮定は前定理と同じとする。$1 < \alpha < 2$ の場合は、φ-完全集合 $E \subset X$ は正の対数容量を持つ。一方任意の $\alpha \ge 2$ に対しては φ-完全であるにもかかわらず対数容量が 0 になるコンパクト集合が存在する。

証明. $\alpha < 2$ の場合は $\gamma > 1$ となるので、3 節の例に注意すると結果が従う。一方、$\alpha \ge 2$ の場合は、$\mathcal{H}_h(E) < \infty$ となる φ-完全コンパクト集合 E を取れば、$\gamma \le 1$ だからこれは対数測度有限、すなわち $h(t) = 1/\log(1/t)$ に関して $\mathcal{H}_h(E) < \infty$ となるが、Erdös-Gillis の定理（定理 3.1 参照）から、このような E の対数容量は 0 である。 □

REFERENCES

1. O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Lund: Diss. **118s** (1935).
2. P. Järvi and M. Vuorinen, *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings*, J. London Math. Soc. **54** (1996), 515–529.
3. S. Kametani, *On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions*, Jap. J. Math. **19** (1945), 217–257.
4. Ch. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (1979), 192–199.
5. T. Sugawa, *Various domain constants related to uniform perfectness*, Complex Variables Theory Appl. **36** (1998), 311–345.
6. M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959.

E-mail address: `sugawa@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`